Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

# École Supérieure de Commerce de Paris

## CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

### Mathématiques II

TOUTES OPTIONS

*Mercredi 9 Mai 1984, de 14 heures à 17 heures*

PROBLEME I

Les deux réels a et b, avec a<b, et l'entier naturel non nul n sont donnés ; soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réel de degré au plus égal à n.

On désigne par f l'application :

$$f : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$$

$$(P,Q) \to \int_a^b P(x)Q(x)dx$$

et par $M_{q,r}$ le polynôme défini pour q et r entiers naturels tels que :

$$M_{0,r}(X) = (X-a)^r(X-b)^r \text{ , } r>0 \text{ et,}$$

$$M_{0,0}(X) = 1 \text{ ,}$$

et si q>0, $M_{q,r}(X) = \frac{d^q}{dX^q}\left[(X-a)^r(X-b)^r\right]$ .

Enfin, p et q étant deux entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q} = \int_a^b M_{q,q}(x).x^p dx$$

.../...

2°) Quelle est la forme quadratique associée à f ? Est-elle définie positive ?

3°) Montrer que $M_{q,q}$ est un polynôme de degré q et que $(M_{0,0}, M_{1,1}, \ldots, M_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

4°) Pour $0 \leqslant p < q$, montrer que a et b sont racines d'ordre q-p de $M_{p,q}$

5°) Etablir la relation pour $q \geqslant 1$

$$I_{p,q} = -p \int_a^b x^{p-1} M_{q-1,q}(x)\,dx$$

En déduire que pour $q \geqslant p$, $I_{p,q} = K_p \cdot \int_a^b M_{q-p,q}(x)dx$, où $K_p$ est un entier relatif, ne dépendant que de p, que l'on déterminera.

6°) Prouver que $I_{p,q} = 0$ si $p > q$

7°) Calculer, pour $0 \leqslant r < q$, $\int_a^b M_{q,q}(x).M_{r,r}(x)dx$

8°) On pose $A_q = \int_a^b M^2_{q,q}(x)dx$

Déterminer en fonction des $A_q$ (que l'on ne calculera pas) la matrice de f dans la base $(M_{0,0}, \ldots, M_{n,n})$ de $\mathbb{R}_n[X]$.





PROBLEME II (les questions 1 et 2 sont indépendantes)

L'entier naturel $n>1$ et le réel $p \in ]0,1[$ sont donnés ; on pose $q = 1-p$.

On considère une suite de 2n épreuves de Bernoulli, indépendantes ; chacune d'elles conduit soit au succès , avec la probabilité p , soit à l'échec, avec la probabilité q.

1°) a - Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si aucun succès n'est obtenu et la valeur i si le premier succès est enregistré à la i-ème épreuve. Déterminer la loi de probabilité de X ; calculer son espérance.

b - Soit Y la variable aléatoire qui prend la valeur j si, pour la première fois, on obtient 2 résultats identiques consécutifs aux épreuves de rangs j-1 et j et la valeur 0 si l'on n'a pas deux résultats consécutifs et identiques. Déterminer la loi de probabilité de Y. On pourra distinguer 2 cas, suivant que j est pair ou impair.

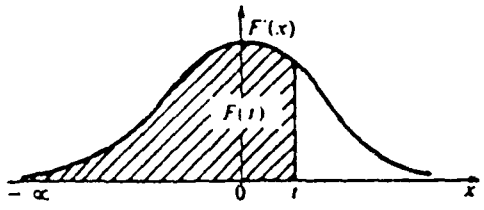
c - Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2°) On prend $n = 5000$ $p = 0,51$. Evaluer la probabilité de l'événement "le nombre des succès est compris strictement entre 4950 et 5200".

.../...

*Extraits de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite*

$$F(t) = P(\{ T < t \}).$$




| $t$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,500 0 | 0,504 0 | 0,508 0 | 0,512 0 | 0,516 0 | 0,519 9 | 0,523 9 | 0,527 9 | 0,531 9 | 0,535 9 |
| 0,1 | 0,539 8 | 0,543 8 | 0,547 8 | 0,551 7 | 0,555 7 | 0,559 6 | 0,563 6 | 0,567 5 | 0,571 4 | 0,575 3 |
| 0,2 | 0,579 3 | 0,583 2 | 0,587 1 | 0,591 0 | 0,594 8 | 0,598 7 | 0,602 6 | 0,606 4 | 0,610 3 | 0,614 1 |
| 0,3 | 0,617 9 | 0,621 7 | 0,625 5 | 0,629 3 | 0,633 1 | 0,636 8 | 0,640 6 | 0,644 3 | 0,648 0 | 0,651 7 |
| 0,4 | 0,655 4 | 0,659 1 | 0,662 8 | 0,666 4 | 0,670 0 | 0,673 6 | 0,677 2 | 0,680 8 | 0,684 4 | 0,687 9 |
| 0,5 | 0,691 5 | 0,695 0 | 0,698 5 | 0,701 9 | 0,705 4 | 0,708 8 | 0,712 3 | 0,715 7 | 0,719 0 | 0,722 4 |
| 0,6 | 0,725 7 | 0,729 0 | 0,732 4 | 0,735 7 | 0,738 9 | 0,742 2 | 0,745 4 | 0,748 6 | 0,751 7 | 0,754 9 |
| 0,7 | 0,758 0 | 0,761 1 | 0,764 2 | 0,767 3 | 0,770 4 | 0,773 4 | 0,776 4 | 0,779 4 | 0,782 3 | 0,785 2 |
| 0,8 | 0,788 1 | 0,791 0 | 0,793 9 | 0,796 7 | 0,799 5 | 0,802 3 | 0,805 1 | 0,807 8 | 0,810 6 | 0,813 3 |
| 0,9 | 0,815 9 | 0,818 6 | 0,821 2 | 0,823 8 | 0,825 4 | 0,828 9 | 0,831 5 | 0,834 0 | 0,836 5 | 0,838 9 |
| 1,0 | 0,841 3 | 0,843 8 | 0,846 1 | 0,848 5 | 0,850 8 | 0,853 1 | 0,855 4 | 0,857 7 | 0,859 9 | 0,862 1 |
| 1,1 | 0,864 3 | 0,866 5 | 0,868 6 | 0,870 8 | 0,872 9 | 0,874 9 | 0,877 0 | 0,879 0 | 0,881 0 | 0,883 0 |
| 1,2 | 0,884 9 | 0,886 9 | 0,888 8 | 0,890 7 | 0,892 5 | 0,894 4 | 0,896 2 | 0,898 0 | 0,899 7 | 0,901 5 |
| 1,3 | 0,903 2 | 0,904 9 | 0,906 6 | 0,908 2 | 0,909 9 | 0,911 5 | 0,913 1 | 0,914 7 | 0,916 2 | 0,917 7 |
| 1,4 | 0,919 2 | 0,920 7 | 0,922 2 | 0,923 6 | 0,925 1 | 0,926 5 | 0,927 9 | 0,929 2 | 0,930 6 | 0,931 9 |
| 1,5 | 0,933 2 | 0,934 5 | 0,935 7 | 0,937 0 | 0,938 2 | 0,939 4 | 0,940 6 | 0,941 8 | 0,942 9 | 0,944 1 |
| 1,6 | 0,945 2 | 0,946 3 | 0,947 4 | 0,948 4 | 0,949 5 | 0,950 5 | 0,951 5 | 0,952 5 | 0,953 5 | 0,954 5 |
| 1,7 | 0,955 4 | 0,956 4 | 0,957 3 | 0,958 2 | 0,959 1 | 0,959 9 | 0,960 8 | 0,961 6 | 0,962,5 | 0,963 3 |
| 1,8 | 0,964 1 | 0,964 9 | 0,965 6 | 0,966 4 | 0,967 1 | 0,967 8 | 0,968 6 | 0,969 3 | 0,969 9 | 0,970 6 |
| 1,9 | 0,971 3 | 0,971 9 | 0,972 6 | 0,973 2 | 0,973 8 | 0,974 4 | 0,975 0 | 0,975 6 | 0,976 1 | 0,976,7 |
| 2,0 | 0,977 2 | 0,977 9 | 0,978 3 | 0,978 8 | 0,979 3 | 0,979 8 | 0,980 3 | 0,980 8 | 0,981 2 | 0,981 7 |
| 2,1 | 0,982 1 | 0,982 6 | 0,983 0 | 0,983 4 | 0,983 8 | 0,984 2 | 0,984 6 | 0,985 0 | 0,985 4 | 0,985 7 |
| 2,2 | 0,986 1 | 0,986 4 | 0,986 8 | 0,987 1 | 0,987 5 | 0,987 8 | 0,988 1 | 0,988 4 | 0,988 7 | 0,989 0 |
| 2,3 | 0,989 3 | 0,989 6 | 0,989 8 | 0,990 1 | 0,990 4 | 0,990 6 | 0,990 9 | 0,991 1 | 0,991 3 | 0,991 6 |
| 2,4 | 0,991 8 | 0,992 0 | 0,992 2 | 0,992 5 | 0,992 7 | 0,992 9 | 0,993 1 | 0,993 2 | 0,993 4 | 0,993 6 |
| 2,5 | 0,993 8 | 0,994 0 | 0,994 1 | 0,994 3 | 0,994 5 | 0,994 6 | 0,994 8 | 0,994 6 | 0,995 4 | 0,995 2 |
| 2,6 | 0,995 3 | 0,995 5 | 0,995 6 | 0,995 7 | 0,995 9 | 0,996 0 | 0,996 1 | 0,996 2 | 0,996 3 | 0,996 4 |
| 2,7 | 0,996 5 | 0,996 6 | 0,996 7 | 0,996 8 | 0,996 9 | 0,997 0 | 0,997 1 | 0,997 2 | 0,997 3 | 0,997 4 |
| 2,8 | 0,997 4 | 0,997 5 | 0,997 6 | 0,997 7 | 0,997 7 | 0,997 8 | 0,997 9 | 0,997 9 | 0,998 0 | 0,998 1 |
| 2,9 | 0,998 1 | 0,998 2 | 0,998 2 | 0,998 3 | 0,998 4 | 0,998 4 | 0,998 5 | 0,998 5 | 0,998 6 | 0,998 6 |

*Table pour les grandes valeurs de $t$*

| $t$ | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,8 | 4,0 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(t)$ | 0,998 65 | 0,999 04 | 0,999 31 | 0,999 52 | 0,999 66 | 0,999 76 | 0,999 841 | 0,999 928 | 0,999 968 | 0,999 99 |

*Note.* — La table donne les valeurs de $F(t)$ pour $t$ positif. Lorsque $t$ est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.